Exercice 1. (a) Il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(I-A)=\{0\}$. Soit donc $X\in\mathbb{R}^n$ un élément de $\mathrm{Ker}(I-A)$ vu comme vecteur colonne. On a donc $(I-A)X=0$, c'est-à-dire $X=AX$. On multiplie matriciellement par X^t et on utilise l'antisymétrie de A, cela nous donne

$$X^tX=X^tAX=-X^tA^tX=-(AX)^tX=-X^tX.$$

Donc $X^tX=0$, ce qui implique que X est le vecteur nul.

(b) Ce résultat est faux pour les matrices complexes. Un exemple est donné par $A=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$, on vérifie que $\det(\mathrm{I}_2-A)=0$.

Exercice 2. (a) L'application f est injective car si $f(x)=0$, alors $\|x\|=\|f(x)\|=\|0\|=0$, donc $x=0$. Par conséquent $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$. On conclut que f est surjective car toute application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans lui-même qui est injective est aussi surjective.

Noter que la condition $\dim(E)<\infty$ est essentielle ici ; le résultat correspondant est faux pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie muni d'un produit scalaire (ou une norme).

(b) L'affirmation (b) découle du calcul suivant :

$$\begin{aligned}\langle f(x),f(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|f(x)+f(y)\|^2-\|f(x)-f(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|f(x+y)\|^2-\|f(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)\\ &= \langle x,y\rangle.\end{aligned}$$

Variante : On peut aussi utiliser une autre formule de polarisation, par exemple

$$\begin{aligned}\langle f(x),f(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|f(x)-f(y)\|^2-\|f(x)\|^2-\|f(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|f(x-y)\|^2-\|f(x)\|^2-\|f(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|x-y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)\\ &= \langle x,y\rangle.\end{aligned}$$

(c) Le point (c) est élémentaire car si $\langle f(x),f(y)\rangle=\langle x,y\rangle$ pour tous $x,y\in X$, alors en particulier $\langle f(x),f(x)\rangle=\langle x,x\rangle$ et donc pour tout $x\in E$ on a

$$\|f(x)\|=\sqrt{\langle f(x),f(x)\rangle}=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\|x\|.$$

(d) La matrice A de f dans une base orthonormée vérifie $A^tA = \mathrm{I}_n$ (on dit que c'est une *matrice orthogonale* et on écrit $A \in \mathrm{O}(n)$) (ici $n = \dim(E)$).

Pour le voir, on remarque d'abord que si $\{e_1, \dots, e_n\} \subset E$ est une base orthonormée de E, alors

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Mais $f(e_i) = \sum_{r=1}^n a_{ri}e_r$ et $f(e_j) = \sum_{s=1}^n a_{sj}e_s$, par conséquent on a

$$\delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle = \langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \sum_{r=1}^n\sum_{s=1}^n a_{ri}a_{sj}\langle e_r, e_s\rangle = \sum_{s=1}^n a_{si}a_{sj} = \sum_{s=1}^n a^t_{is}a_{sj} = (A^tA)_{ij}$$

Exercice 3. (a) Le coefficient (i, j) du produit $S = A^tA$ est

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^n a^t_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj},$$

qui n'est autre que le produit scalaire standard de la $i^{\text{ème}}$ colonne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Si la matrice est orthogonale, alors $S = \mathrm{I}_n$ et $s_{ij} = \delta_{ij}$, donc

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \delta_{ij},$$

ce qui veut dire que les colonnes de A forment un système orthonormé de vecteurs (et il s'agit d'une base car ils sont linéairement indépendants puisque A est une matrice inversible).

(b) On a $1 = \det(\mathrm{I}_n) = \det(A^tA) = \det(A^t)\det(A) = \det(A)^2$, donc $\det(A) = \pm 1$.

(c) Observons d'abord que $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, car toute matrice orthogonale est inversible. On doit vérifier trois conditions pour prouver que c'est un sous-groupe :

1. $\mathrm{O}(n) \neq \emptyset$. C'est clair car $\mathrm{I}_n \in \mathrm{O}(n)$.
2. $A, B \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow AB \in \mathrm{O}(n)$. En effet on a
$$(AB)^tAB = (B^tA^t)AB = B^t(A^tA)B = B^t\mathrm{I}_nB = B^tB = \mathrm{I}_n.$$
3. $A \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$. En effet, si $A \in \mathrm{O}(n)$, alors $A^{-1} = A^t$ et donc
$$(A^{-1})^tA^t = (A^t)^tA^t = AA^t = AA^{-1} = \mathrm{I}_n.$$

(d) Le déterminant définit un homomorphisme de groupes $\det : \mathrm{O}(n) \to \{+1, -1\}$, et par définition $\mathrm{SO}(n)$ est le noyau de cet homomorphisme. C'est donc un sous-groupe.

(e) Si $\det(A) = \det(B) = -1$, alors $\det(AB) = +1$, donc $\mathrm{O}(n) \cap \{A : \det(A) = -1\}$ n'est pas un groupe (ni un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$).

Exercice 4. a) Faux. Il suffit de considérer une matrice inversible A non orthogonale et prendre $B = A^{-1}$.

b) Vrai. En effet on sait que $\mathrm{O}(n)$ est un groupe, donc si $AB \in \mathrm{O}(n)$, alors

$$A \in \mathrm{O}(n) \Leftrightarrow A^{-1} \in \mathrm{O}(n) \Leftrightarrow B = A^{-1}(AB) \in \mathrm{O}(n).$$

c) Vrai. Le fait que A soit symétrique s'écrit $A^t = A$, donc

$$A \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow A^2 = A^t A = \mathrm{I}_n.$$

d) Faux. Un contre-exemple est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, qui satisfait $A^2 = \mathrm{I}_2$, mais n'est ni orthogonale, ni symétrique.

Exercice 5. (a) On trouve une base orthonormée de W en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base $\{w_1, w_2, w_3\}$. Les calculs nous donnent

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0), \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{26}}(-2,3,3,2)$$

On peut vérifier d'une part que ces trois vecteurs sont orthonormés et d'autre part qu'ils appartiennent à W (et donc forment une base de W car $\dim(W) = 3$).

(b) Pour trouver la distance δ entre

$$x = (5,1,3,-1)$$

et W on cherche la projection orthogonale $x' = \mathrm{Proj}_W(x)$ de x sur W par la formule vue au cours, on aura alors $\delta = \|x' - x\|$. Le point x' est donné par

$$\begin{aligned} x' &= \langle u_1, x\rangle u_1 + \langle u_2, x\rangle u_2 + \langle u_3, x\rangle u_3 = \frac{4}{\sqrt{2}}\, u_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\, u_2 + \ 0 \cdot u_3 \\ &= (2,-1,1,2). \end{aligned}$$

on a donc

$$x - x' = \ (3,2,2,-3)\,.$$

A ce stade, il peut être utile de vérifier que x' appartient à W et que le vecteur $(x - x')$ est orthogonal à w_i pour $i = 1,2,3$. Nous laissons le soin de la vérification au lecteur.

Finalement, la distance cherchée est

$$\delta = \|x' - x\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{26}.$$

(c) La base la plus simple de l'espace vectoriel $S_2 \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est sans doute donnée par

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or

$$\mathrm{Tr}(S_1^t S_2) = \mathrm{Tr}(S_1^t S_3) = \mathrm{Tr}(S_2^t S_3) = 0$$

donc on a de la chance notre base est déjà orthogonale (on n'aura donc pas besoin de Gram-Schmidt). De plus

$$\mathrm{Tr}(S_1^t S_1) = \mathrm{Tr}(S_2^t S_2) = 1, \quad \mathrm{Tr}(S_3^t S_3) = 2$$

Une base orthonormée de S_2 est alors donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. (a) Si m et n sont deux entiers distincts, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\Big(\cos\big((m+n)x\big) + \cos\big((m-n)x\big)\Big)dx = 0,$$

car pour tout entier k non nul on a $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx = 0$. On a donc prouvé que

$$m, n \in \mathbb{Z} \text{ distincts et } m \neq -n \implies \langle \cos mx, \cos nx \rangle = 0.$$

(b) Pour montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)dx$ vaut π, voici deux manières de le vérifier :

1. On utilise l'identité $\cos^2(mx) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2mx))$:
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} ((1+\cos(2mx)))dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2m}\sin(2mx)\right]_{x=-\pi}^{\pi} = \pi.$$
2. On évite tout calcul en observant que (par périodicité)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(mx)+\sin^2(mx))dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = \pi.$$

On a donc

$$\|\cos(mx)\| = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)^2 dx} = 1.$$

La famille $\{\cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx\}$ est donc orthonormée et non seulement orthogonale.

(c) Si $m = \pm n$, alors $\|\cos(mx) - \cos(mx)\| = 0$. Sinon, alors $\cos(mx)$ et $\cos(nx)$ sont orthogonaux et par le théorème de Pythagore, on a

$$\|\cos(mx) - \cos(nx)\| = \sqrt{\|\cos(mx)\|^2 + \|\cos(nx)\|^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Exercice 7. (a) Par un calcul direct on trouve que

$$\langle x^m, x^n\rangle = \int_{-1}^{1} x^{m+n}dx = \begin{cases} \frac{2}{m+n+1} & \text{si } m+n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } m+n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Et

$$\|x^k\| = \sqrt{\langle x^k, x^k\rangle} = \left(\int_{-1}^{1} x^{2k}dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}.$$

On a

$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$P_3(x) = \sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3 - 3x)$
$P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x$	$P_4(x) = \frac{3\sqrt{2}}{16}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$P_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3x^2 - 1)$	$P_5(x) = \frac{11}{128}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
	$P_6(x) = \frac{\sqrt{26}}{32}\,(231\,x^6 - 315\,x^4 + 105\,x^2 - 5)$

Voici les calculs :

• Le premier polynôme de Legendre s'obtient en normalisant la fonction constante $Q_0(x) = 1$. On a donc $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

• Pour le deuxième polynôme de Legendre, on remarque d'abord que

$$\langle x, P_0(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} xdx = 0,$$

et

$$\langle x, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}.$$

Donc

$$P_1(x) = \frac{x}{\sqrt{\langle x, x\rangle}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x$$

• Pour le troisième polynôme de Legendre, on calcule d'abord les produits scalaires

$$\langle P_0(x), x^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{et} \quad \langle P_1(x), x^2\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} x^3dx = 0.$$

Donc $P_2(x)$ s'obtient en calculant d'abord

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= x^2 - \langle P_0(x), x^2\rangle P_0(x) - \langle P_1(x), x^2\rangle P_1(x) = x^2 - \langle P_0(x), x^2\rangle P_0(x) \\ &= x^2 - \frac{2}{3\sqrt{2}}P_0 = x^2 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\|Q_2\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45},$$

et donc

$$P_2 = \frac{Q_2(x)}{\|Q_2\|} = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{8}}\left(3x^2 - 1\right).$$

• Pour le quatrième polynôme de Legendre, on calcule d'abord

$$\langle P_0(x), x^3\rangle = 0, \quad \langle P_1(x), x^3\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} x^4 dx = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2}{5} = \frac{\sqrt{6}}{5} \quad \text{et} \quad \langle P_2(x), x^3\rangle = 0,$$

Donc $P_3(x)$ s'obtient en normalisant

$$Q_3(x) = x^3 - \frac{\sqrt{6}}{5}P_1(x) = x^3 - \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\,x = x^3 - \frac{3}{5}x \quad \Rightarrow \quad P_3 = \frac{Q_3(x)}{\|Q_3\|} = \sqrt{\frac{7}{8}}\,(5x^3 - 3x).$$

Ensuite les calculs se compliquent...

Remarques 1. La définition usuelle des polynômes de Legendre est un peu différente, on remplace la condition d'orthonormalité par

$$\langle P_n, P_m\rangle = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n},$$

cela modifie chaque polynôme par une constante multiplicative.

2. Les polynômes de Legendre sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(1 - x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_n(x) - 2x\frac{d}{dx}P_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Cette équation apparaît notamment dans l'étude de l'équation de Schrödinger à potentiel sphérique, ce qui justifie l'importance des polynômes de Legendre.

Exercice 8. (a) La structure d'espace vectoriel sur $\mathscr{S}$ se définit de façon évidente : Si $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors $x + y = (x_n + y_n)$ et $\lambda x = \{\lambda x_n\}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. La vérification des 8 axiomes de la définition d'un espace vectoriel se fait coordonnée par coordonnée (on peut aussi remarquer que $\mathscr{S}$ n'est rien d'autre que l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{N}$ vers K).

(b) La suite nulle 0 appartient à $\mathscr{S}_0$ car on peut prendre $m = 0$ dans la définition. Si $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont de support fini (respectivement m_1 et m_2), alors

$\lambda x + y = \{\lambda x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de support fini (au plus égal à $\max\{m_1, m_2\}$). Ainsi $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$ est non-vide et fermé pour les combinaisons linéaires, c'est donc un sous-espace vectoriel.

(c) Voici comment *il ne faut pas* définir ce qu'est une base : *Une base de l'espace vectoriel V est une liste de vecteurs $\{v_1, \dots, v_n\}$ qui est libre et qui engendre V.* Une telle définition convient uniquement dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie.

La définition correcte s'énonce ainsi : Une base de l'espace vectoriel V est un sous-ensemble B de V qui est libre et qui engendre V. Dire que B est *libre* signifie que pour toute famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_n\} \subset B$ qui sont deux-à-deux distincts, si $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Et dire que B *engendre* V signifie que pour tout $x \in V$ il existe $\{w_1, \dots, w_m\} \subset B$ et $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \subset \mathbb{K}$ tels que $x = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m$.

On peut aussi dire que $B \subset V$ est une base si et seulement si tout vecteur de V s'écrit de façon unique comme combinaisons linéaires d'éléments de B (i.e. il existe un unique sous-ensemble $\{w_1, \dots, w_m\} \subset B$ et $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \subset \mathbb{K}$ unique tels que $x = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m$.)

Dans cette définition, B peut -être infini, éventuellement non dénombrable, mais il est important de noter qu'on ne fait référence qu'à des combinaisons linéaires finies d'éléments de B.

Une base dénombrable de $\mathscr{S}_0$ est donné par $\mathscr{E} = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, où $e_j \in \mathscr{S}_0$ est la suite qui vaut 1 pour l'indice j et 0 pour tous les autres indices :

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots).$$

On peut considérer que $\mathscr{E}$ est la base canonique de $\mathscr{S}_0$.

(d) L'application

$$\beta : \mathscr{S} \times \mathscr{S}_0 \to \mathbb{K}, \qquad \beta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

est bien définie car on ne doit considérer comme deuxième argument y que des éléments de $\mathscr{S}_0$. Donc il existe un entier m tel que $y_n = 0$ si $n > m$ et on a donc

$$\beta(x, y) = \sum_{n=0}^{m} x_n y_n.$$

C'est une somme finie et en particulier nous n'avons pas à nous préoccuper de question de convergence ou du sens à donner à cette somme. La bilinéarité se vérifie de façon usuelle.

(e) La notion d'*accouplement non-dégénéré* est formulée dans la Définition 10.2.3 p. 35 du polycopié. Il y a deux conditions à vérifier.

Pour la première condition, on se donne un élément quelconque $x \in \mathscr{S}$ et on suppose que pour tout $y \in \mathscr{S}_0$ on a $\beta(x, y) = 0$. Alors on doit prouver que dans ce cas $x = 0$. Mais il est clair que si $x \in \mathscr{S}$, alors $\beta(x, e_n) = x_n$. Donc on a $x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $x = 0 \in \mathscr{S}$.

Pour la deuxième condition, on se donne $y \in \mathscr{S}_0$ quelconque et on suppose que pour tout $x \in \mathscr{S}$ on a $\beta(x, y) = 0$; et on doit prouver que cela implique que $y = 0$. Mais l'argument est le même : on a $0 = \beta(e_n, y) = y_n$ pour tout n, donc $y = 0$.

(f) Supposons que le corps $\mathbb{K}$ contient q éléments et notons pour tout entier $m \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{S}_m = \mathscr{S} \cap \{x : y_n = 0 \ \forall n > m\}.$$

Alors $\mathscr{S}_m$ est un ensemble fini (il contient q^m éléments) et par définition $\mathscr{S}_0 = \cup_{m \in \mathbb{N}} \mathscr{S}_m$. Ceci montre que $\mathscr{S}_0$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis ; c'est donc un ensemble dénombrable.

Par contre $\mathscr{S}$ n'est pas dénombrable. Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, on remarque que l'écriture binaire montre que $\mathscr{S} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ a le même cardinal que $\mathbb{R}$. De manière équivalente on peut construire une bijection entre l'ensemble (non dénombrable) $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ et un sous-ensemble de $\mathscr{S}$ de la façon suivante. À tout sous-ensemble (fini ou pas) $A \subset \mathbb{N}$ on associe la suite $\xi_A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = 1$ si $n \in A$ et $x_n = 0$ si $n \notin A$. C'est une injection, ce qui suffit à montrer que $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) \leq \mathrm{card}(\mathscr{S})$, et l'inégalité inverse est facile à démontrer (mais pas nécessaire, car on sait qu'on a pour tout ensemble non-vide E l'inégalité stricte $\mathrm{card}(\mathscr{P}(E)) > \mathrm{card}(E)$ (de manière équivalente, on peut utiliser l'argument diagonal de Cantor pour montrer que $\mathrm{card}(\mathbb{N}) < \mathrm{card}(\mathbb{R})$).

(g) Par le point (e) et le Corollaire 10.2.4, on sait qu'il existe une application linéaire injective $\beta_g : \mathscr{S} \to \mathscr{S}_0'$. En particulier l'ensemble $\mathscr{S}_0^*$ n'est pas dénombrable (puisqu'il contient un sous-ensemble non dénombrable) et donc il n'existe aucune bijection entre $\mathscr{S}_0^*$ et $\mathscr{S}_0$.

(h) Si $\mathscr{S}$ admettait une base dénombrable, alors on pourrait construire un isomorphisme entre $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_0$, or on a vu qu'il n'y a pas de bijection entre ces deux ensembles.

Remarque 1. On a donc montré avec cet exercice que lorsque le corps K est fini, l'espace vectoriel $\mathscr{S}_0$ n'est pas isomorphe à son dual et $\mathscr{S}$ n'admet pas de base dénombrable. Ces deux propriétés sont vraies pour tout corps K (fini on infini), mais la preuve dans le cas d'un corps infini est plus subtile (ce résultat est parfois appelé le théorème d'Erdős-Kaplansky.)